Généralités sur les suites

Aperçu historique :

*La notion de suite est présente dès qu'apparaissent des procédés illimités de calcul. On en trouve, par exemple, chez **Archimède**, spécialiste des procédés illimités d'approximation pour des calculs d'aires et de volumes, ou en Égypte vers 1700 avant Jésus-Christ.*

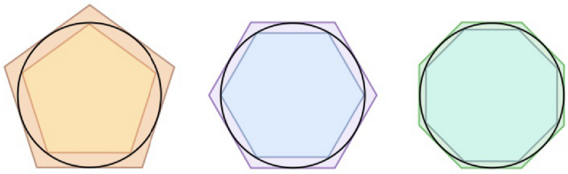
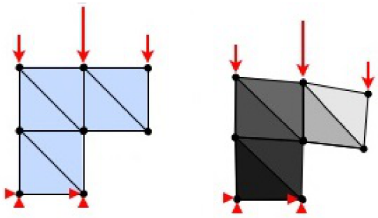
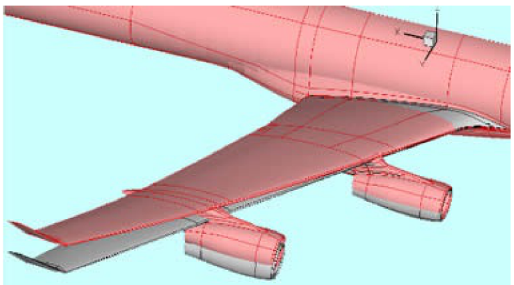


FIGURE 5.1 – Méthode d'Archimède pour le calcul d'aires

*Au Ier siècle après J.-C. **Héron d'Alexandrie** a proposé une méthode d'extraction de racine carrée basée sur des suites : pour extraire la racine carrée de A , choisir une expression arbitraire a, et prendre la moyenne entre a et $\frac{A}{a}$, puis recommencer aussi loin que l'on veut le processus précédent.*
*Au XVIIème siècle, **Bernoulli**, **Newton**, **Moivre**, **Stirling** et **Wallis**, s'intéressent aux suites pour approcher des valeurs numériques. C'est à Lagrange que l'on doit, semble-t-il, la notation indicielle x_n.*
Dans la seconde moitié du XXe siècle, le développement des calculateurs et des ordinateurs donne un second souffle à l'étude des suites en analyse numérique grâce à la méthode des éléments finis, qui sont utilisés par exemple pour étudier les efforts subis par une voilure d'avion. Les suites sont utilisées aussi dans les mathématiques financières.



Méthode des éléments finis



Déformation d'une voilure d'avion

1. Notion de suite

Définition 5.1 Une suite u de nombres réels est une fonction dont la variable est un entier naturel.
L'image par u d'un entier $n \in \mathbb{N}$ est notée u_n et se lit : "u *indice* n".
u_n est appelé *terme général* de la suite.

Dans la notation u_n, n est un entier dont dépend la valeur de u_n. Cet entier est appelé *l'indice* du terme u_n. Il joue le même rôle que le « x » dans l'expression de $f(x)$ où f est une fonction numérique. La notation indicielle est ici plus commode à écrire.

Remarques :

- Parfois, la suite u est notée (u_n), ou plus précisément $(u_n)_{n\geq 0}$ si la suite est définie à partir de $n = 0$.
- Certaines suites ne sont définies qu'*à partir d'un certain rang* ; par exemple, la suite de terme général $u_n = \sqrt{n-5}$ n'est définie qu'à partir du rang 5, car en-deçà, l'expression qui est sous la racine est négative, et la racine n'est donc pas définie.

Exemple :
On définit (u_n) comme la suite des nombres pairs.
Dans ce cas, on a : $u_0 = 0$, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, ...
On peut écrire aussi $u_n = 2 \times n$, puisque les nombres pairs sont les multiples de 2.
Grâce à cette formule explicite, on peut calculer tous les termes de la suite : $u_6 = 2 \times 6 = 12$, $u_n = 2 \times n$, mais aussi $u_p = 2 \times p$ ou encore $u_t = 2 \times t$.
Attention à la façon d'écrire les indices :
Si on choisit comme indice l'entier $n + 1$ on a $u_{n+1} = 2 \times (n + 1) = 2n + 2$.
À ne pas confondre avec $u_n + 1 = (2 \times n) + 1 = 2n + 1$.
Il est donc très important d'écrire les indices au bon endroit et à la bonne taille (*il s'agit de la même distinction qu'entre $f(x + 1)$ et $f(x) + 1$ pour les fonctions*).

Selon le phénomène qu'elle représente, la suite peut être définie par une formule explicite, par une formule de récurrence où chaque terme est défini par rapport au précédent, par des données expérimentales, etc...
On dit qu'une suite (u_n) est entièrement définie si on est capable de calculer u_n pour n'importe quelle valeur de n.

2. Suite définie par une formule explicite, "en fonction de n"

Dans l'exemple de la suite des nombres pairs, lorsqu'on définit la suite en posant $u_n = 2n$, on dit que l'on en donne une formule explicite : le terme général u_n est défini "en fonction de n".
Si l'on considère la fonction $f(x) = 2x$, on a ici $u_n = f(n)$.

> **Définition 5.2** Soient $a \in \mathbb{N}$, et f une fonction définie sur l'intervalle $[a; +\infty[$.
> On définit la suite $(u_n)_{n\geq a}$ associée à la fonction f en posant, pour tout entier $n \geq a$, $u_n = f(n)$.

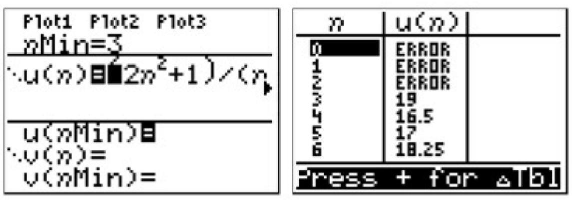
Exemple : Soit la suite (w_n), de terme général $w_n = \frac{2n^2+1}{n-2}$.

1) Déterminons la fonction associée à cette suite :
On a $w_n = f(n)$, avec $f : x \in \mathbb{R} - \{2\} \longmapsto \frac{2x^2+1}{x-2}$

2) A partir de quel rang la suite (w_n) est-elle définie ?
Pour que $w_n = f(n)$ soit défini, il faut $n \neq 2$, donc la suite est définie à partir du rang $n = 3$.

3) Calcul des trois premiers termes "à la main" (valeur exacte)
$w_3 = \frac{2\times3^2+1}{3-2} = 19$; $w_4 = \frac{2\times4^2+1}{4-2} = \frac{33}{2}$; $w_5 = \frac{2\times5^2+1}{5-2} = \frac{51}{3}$

4) Calcul de termes à la calculatrice (valeurs approchées)



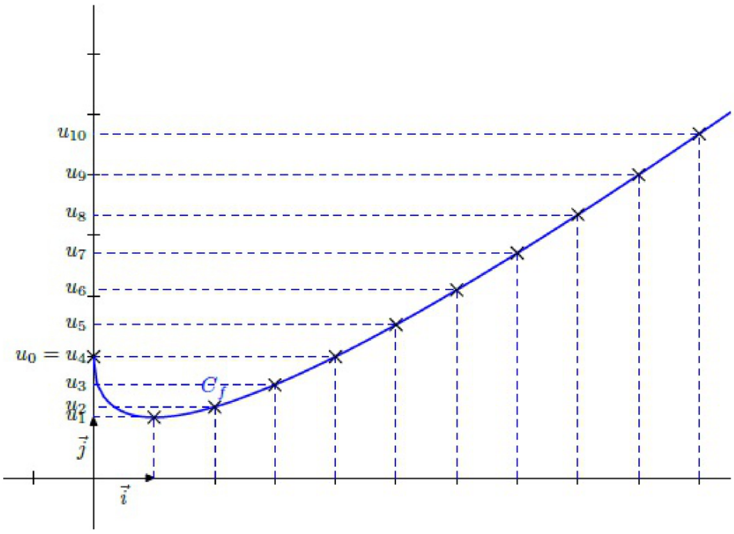
Représentation graphique d'une suite définie explicitement en fonction de n :
On considère la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x)=\frac{x+3}{x^2+1} \end{array}$.
Si $x \in \mathbf{N}$, $f(x)$ est toujours défini. On peut donc considérer la suite u de terme général :

$$u_n = f(n) = \frac{n+3}{n^2+1}$$

On a alors :

$$u_0 = \frac{0+3}{0^2+1} = 3,\ u_1 = \frac{1+3}{1^2+1} = 2,\ \ldots$$

Dans cette situation, on est bien en mesure de calculer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On trace dans un repère la représentation graphique de f. Le terme u_i de la suite est alors l'ordonnée du point de $\mathcal{C}_f$ dont l'abscisse est i.
Le graphique ci-dessous représente la suite u définie par $u_n = f(n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2$. Les termes de la suite se lisent donc sur l'axe des ordonnées.



3. Suite définie par récurrence, "de proche en proche"

Dans l'exemple de la suite des nombres pairs, on pourrait définir la suite en disant que l'on obtient chaque terme en ajoutant 2 au précédent : $u_{n+1} = u_n + 2$. On dit alors que la suite est définie par récurrence : le terme u_n est défini *en fonction* du (ou des) terme(s) précédent(s). On est donc amené à considérer une fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$; dans notre exemple, $f : x \mapsto x + 2$ convient puisque $u_{n+1} = u_n + 2$.

Un autre exemple : Je possède 1000€ sur mon livret d'épargne. Chaque année on me reverse dessus 5% en intérêts et je rajoute 100€. J'appelle u_n la somme dont je dispose sur mon livret après n ans. On a donc :
- pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (1 + \frac{5}{100}) \times u_n + 100 = 1,05u_n + 100$;
- la somme disponible sur le livret aujourd'hui est 1000€. Donc : $u_0 = 1000$.

On a : $u_1 = 1,05 \times 1000 + 100 = 1150$, puis $u_2 = 1,05 \times 1150 + 100 = 1307,50$ ....
De proche en proche, on peut donc calculer u_n pour n'importe quelle valeur de n.

Définition 5.3 Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle I tel que $f(I) \subset I$, et $a \in I$.
On dit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$
est définie par *récurrence* et on note :

$$u : \begin{cases} u_0 = a \\ \text{pour } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Remarques : La condition $f(I) \subset I$ est extrêmement importante, car sans elle on ne peut garantir l'existence de la suite : il serait possible qu'un certain u_n soit bien dans I, mais que $f(u_n)$, c'est-à-dire u_{n+1}, sorte de l'intervalle I. Dans ce cas, f ne serait pas définie en u_{n+1}, et on ne pourrait pas construire le terme u_{n+2}.

Exemple : Soit la suite (u_n), définie par $u : \begin{cases} u_0 = -2 \\ \text{pour } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3} \end{cases}$.

Vérification de la condition "$f(I) \subset I$" : $\mathscr{D}_f = [-3; +\infty[$. On a bien $f([-3; +\infty[) = \mathbb{R}_+ \subset [-3; +\infty[$.

1) Calculons les trois premiers termes :

$u_1 = \sqrt{u_0 + 3} = \sqrt{-2 + 3} = 1$

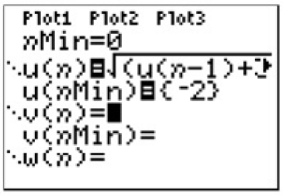
$u_2 = \sqrt{u_1 + 3} = \sqrt{1 + 3} = 2$

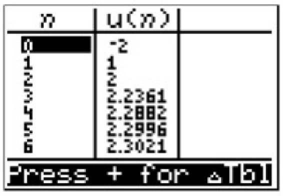
$u_3 = \sqrt{u_2 + 3} = \sqrt{2 + 3} = \sqrt{5}$

Pour calculer un terme donné, on est obligé de calculer tous les termes précédents.

2) Calcul de termes à la calculatrice (valeurs approchées)

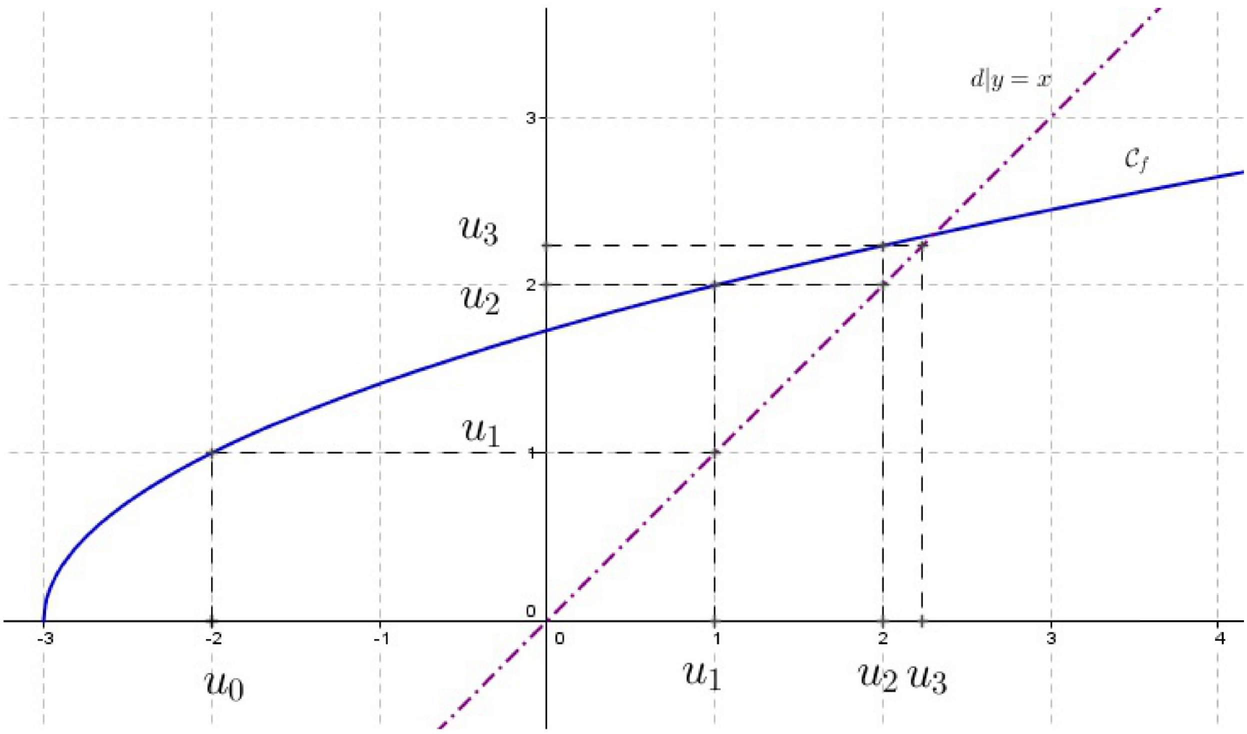
Se placer dans le menu "suites" ou "seq" ; attention, on entre $u(n)$ en fonction de $u(n-1)$.





2) Représentation graphique

On trace dans un repère la droite d d'équation $y = x$ et la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f. On place ensuite sur l'axe des abscisses u_0. On a $u_1 = f(u_0)$; on peut donc lire u_1 sur l'axe des ordonnées comme l'image de u_0 par f. On reporte alors u_1 sur l'axe des abscisses grâce à d.



4. Fiche de synthèse sur les suites

Penser à passer sa calculatrice en "mode suites".

Suite définie explicitement : on a éventuellement le premier terme, puis l'expression de u_n en fonction de n.

Suite définie par récurrence : on a le premier terme, puis la relation qui définit chaque terme à partir du précédent.
Ce terme peut être défini, par exemple, à partir des deux précédents, mais dans ce cas l'énoncé doit donner les *deux* premiers termes pour permettre l'initialisation.